

# Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática

*(Introduction to the techniques of the fractional calculus to investigate some models of the mathematical physics)*

Fabio G. Rodrigues<sup>1</sup>, E. C. de Oliveria<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>*Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas,  
Campinas, SP, Brasil*

## Resumo

Neste trabalho, recorremos à metodologia da transformada de Laplace a fim de mostrar a sua importância na abordagem de uma classe de equações diferenciais fracionárias. Em particular, apresentamos aplicações desta metodologia ao discutirmos possíveis generalizações de certos problemas físicos no campo da viscoelasticidade linear e osciladores harmônicos, comprovando que o uso do cálculo fracionário em modelagem e resolução de problemas usualmente abordados pelo cálculo de ordem inteira, oferece vantagens promissoras para nos fornecer formulações mais consistentes com os dados experimentais.

**Palavras-chave:** Cálculo fracionário, Equações diferenciais fracionárias; Transformada de Laplace.

In this paper, we resort to the Laplace transform method in order to show its efficiency when approaching some types of fractional differential equations. In particular, we present some applications of such methods when applied to possible generalizations of certain physical problems in linear viscoelasticity and harmonic oscillators, proving that fractional calculus is well suited for the modelling and solving of problems usually treated by ordinary integer calculus, with the promising advantages of being able to provide more accurate theoretical predictions to fit with experimental data.

**Keywords:** Fractional calculus, fractional differential equations, Laplace transform.

## 1 Introdução

O cálculo de ordem não inteira, popularmente conhecido como cálculo fracional ou Cálculo Fracionário (CF), de uma maneira simples, tem a intenção de generalizar o cálculo integral e diferencial, conforme proposto, independentemente, por Newton e Leibniz. Aqui, evitamos, sempre que

---

<sup>1</sup>E-mail: fabior@mpcnet.com.br

<sup>2</sup>E-mail:capelas@ime.unicamp.br

possível, o aparato matemático envolvendo explicitamente as fórmulas advindas, por exemplo, das diversas maneiras de calcular uma derivada. Ainda mais, utiliza-se a nomenclatura CF por entender que o nome está totalmente consolidado e, em língua portuguesa, é uma tradução livre de *fractional calculus*. Um estudo versando sobre a linha do tempo envolvendo o CF pode ser encontrada em [1, 2, 3] enquanto um capítulo sobre a história do cálculo fracionário pode ser encontrada em [4, 5].

Como já mencionado, existe mais de uma maneira de calcular a derivada e, portanto, parece eminentes questões do tipo: Para que serve o CF? Onde utilizá-lo? Existe uma interpretação geométrica e/ou física? Qual a relação, se é que existe, com o cálculo de ordem inteira? Muitas outras questões de ordem matemática ou de ordem física podem ser colocadas. Por exemplo, apenas para mencionar duas dessas questões: Será que existe uma regra da cadeia associada à derivada de ordem fracionária? E o teorema fundamental do cálculo, teorema que coroa os cálculos diferencial e integral, tem um análogo fracionário? Ainda mais, no cálculo de ordem inteira emerge uma classe de funções, as chamadas funções especiais, soluções das equações diferenciais ordinárias e/ou parciais que descrevem um particular sistema, enquanto no CF emerge também uma classe de funções a ele associado, solução de um particular problema cuja derivada é de ordem não inteira, as funções especiais do CF [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

O objetivo principal desse trabalho é introduzir as ferramentas básicas a fim de discutir um particular problema, composto por equação diferencial fracionária e condição inicial. De modo a atingir este objetivo, isto é, discussão e resolução de uma equação diferencial fracionária, aborda-se o tema derivada fracionária que, por sua vez, requer o conceito de integral fracionária. De uma maneira bastante simplificada, introduzimos o conceito de integral fracionária para depois, utilizando tal conceito, introduzir a derivada fracionária que, nesse trabalho discute apenas as formulações conforme propostas por Riemann-Liouville e por Caputo [6, 8, 9, 10, 12, 14, 18, 21, 22]. Em particular, apesar de mais restritiva, a derivada de Caputo admite a mesma interpretação para as condições iniciais que a formulação clássica de ordem inteira [11, 14, 15]. Mostrou-se também que essas duas formulações podem ser recuperadas a partir da definição de Grünwald-Letnikov [20].

De uma maneira simples e objetiva, pode-se pensar nos operadores de ordem fracionária como os operadores que representam funções da memória sobre a história de alguns sinais de sistemas físicos. Por exemplo, uma integral de primeira ordem, de uma variável que representa o estado de um sistema, pode ser pensada como uma soma em que se atribuem pesos a cada ponto, com todos os pontos ponderados com o mesmo peso, independentemente de quão longe estão no passado. Isso sobre toda a história do sistema. Uma integral de ordem fracionária é também uma soma ponderada, mas com os pesos diminuindo para trás no tempo [14, 15, 16, 18].

Em termos matemáticos, o CF atrai por si próprio um grande interesse, pois o formalismo envolvido faz uso de diversas funções especiais, tais como a generalização da função fatorial, que é a função gama e a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, como uma generalização da função exponencial, dentre muitas outras de interesse acadêmico e prático [9, 17]. Existe mais de uma formulação possível para o CF, sendo cada uma dessas mais adequada a um certo contexto físico do que outro. As definições mais comuns são as de Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Liouville, Weyl e Riesz-Feller [20]. Parece que o número de definições não para de crescer [21]. São recentes as formulações de Hilfer [7], para particulares valores do parâmetro associado à ordem da derivada, onde as formulações de Riemann-Liouville e Caputo são casos extremos e a formulação proposta por Khalil-Horani-Yousef-Sababheh [23] a assim chamada *conformable fractional derivative* que, numa conveniente tradução para o português, pode ser chamada de derivada fracionária compatível.

Neste trabalho discutem-se modelos fracionários associados à derivada de Riemann-Liouville e

de Caputo, no sentido de que tais modelos são mais representativos que os respectivos modelos lineares clássicos de ordem inteira, isto é, descrevem com maior acurácia os sistemas em questão.

O trabalho está disposto da seguinte forma: Na seção dois são introduzidos os operadores de integração e os operadores de diferenciação fracionários conforme propostos por Riemann-Liouville e Caputo. Na terceira seção são abordadas as equações diferenciais fracionárias (EDF) conforme as formulações supra-citadas, sendo que para estas duas formulações apresentam-se, através de teoremas, os casos gerais. Na seção quatro, discute-se a transformada de Laplace associada às integrais e derivadas fracionárias e justifica-se a conveniência de se trabalhar com a formulação da derivada segundo Caputo. Ainda na seção quatro apresenta-se, através de exemplos, o cálculo da transformada de Laplace de funções de Mittag-Leffler, concluindo a seção, resolve-se duas EDFs através da transformada de Laplace, cuja solução é dada em termos de funções de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Na seção cinco discute-se a modelagem de dois sistemas onde o cálculo fracionário desempenha papel preponderante. Após uma revisão do conceito de viscoelasticidade linear, em particular, discutindo os clássicos modelos de Maxwell e Voigt, apresenta-se o modelo fracionário de Scott-Blair o qual, nos limites extremos, recupera os dois modelos clássicos. O modelo fracionário tem sua justificativa através de gráficos a partir dos quais fica clara a importância da formulação. Por fim, o clássico problema do oscilador harmônico em sua versão fracionária é discutido sendo a solução dada em termos de funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros [17]. Aqui também, o caso limite (clássico) é recuperado no caso em que o parâmetro associado à derivada é igual a dois.

## 2 Operadores de Integração e Diferenciação

Visto que a definição de derivada de ordem não inteira nas formulações de Riemann-Liouville e Caputo dependem da integral fracionária, começamos com tal conceito, isto é, introduzimos a integral fracionária para depois apresentar a derivada fracionária.

Dentre as diversas formulações existentes para os operadores de integração e diferenciação fracionárias [13, 21, 24], abordamos, para os propósitos deste trabalho, apenas as versões segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo, definidas a seguir.

**Definition 1** Sejam  $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo finito e  $f \in L_1[a, b]$ . As expressões  $\mathcal{I}_{a+}^\nu f$  e  $\mathcal{I}_{b-}^\nu f$  definidas por:

$$(\mathcal{I}_{a+}^\nu f)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad (1)$$

com  $x > a$ ,  $\nu > 0$

$$(\mathcal{I}_{b-}^\nu f)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^b (t-x)^{\nu-1} f(t) dt, \quad (2)$$

com  $x < b$ ,  $\nu > 0$ , onde  $\Gamma(\nu)$  é a função gama, definem as integrais fracionárias de Riemann-Liouville<sup>3</sup> (IFRL) de ordem  $\nu \in \mathbb{R}$  num intervalo real finito. As integrais em Eq.(1) e Eq.(2) são chamadas de integrais fracionárias à esquerda e à direita, respectivamente.

---

<sup>3</sup>Alguns autores [6, 10], distinguem a nomenclatura, baseando-se nos limites inferior e superior das integrais. Segundo suas nomenclaturas, Eq.(1) e Eq.(2) são chamadas de versão segundo Riemann; e quando  $a = -\infty$  e  $b = \infty$ , denotam por versão segundo Liouville.

**Definition 2** Sejam  $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo finito e  $f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b]$ . As expressões  $\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f$  e  $\mathcal{D}_{b-}^{\nu} f$  definidas por

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) &\equiv \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} [(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)] \\ &= \left( \frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) \\ &= \frac{\left( \frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}}}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1+\nu-\mathbf{n}}}, \end{aligned} \quad (3)$$

com  $x > a$  e

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{b-}^{\nu} f)(x) &\equiv \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} [(\mathcal{I}_{b-}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)] \\ &= \left( -\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{b-}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) \\ &= \frac{\left( -\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}}}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1+\nu-\mathbf{n}}}, \end{aligned} \quad (4)$$

com  $x < b$ , onde  $\mathbf{n} = [\nu] + 1$  e  $[\nu]$  é a parte inteira de  $\nu$ , definem as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (DFRL) de ordem  $\nu \in \mathbb{R}$ , com  $\nu \geq 0$ , à esquerda e à direita, respectivamente.

**Definition 3** Sejam  $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$  e  $\nu \in \mathbb{R}$ , com  $\nu > 0$ . Considere  ${}_a\mathcal{D}_x^{\nu}$  e  ${}_x\mathcal{D}_b^{\nu}$  as DFRL como nas Eq.(3) e Eq.(4) e defina  $\mathbf{n} = [\nu] + 1$ ,  $\nu \notin \mathbb{N}_0$ ;  $\mathbf{n} = \nu$  se  $\nu \in \mathbb{N}_0$ , então as expressões

$${}_a\mathcal{D}_x^{\nu} f(x) = {}_a\mathcal{D}_x^{\nu} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \quad (5)$$

e

$${}_x\mathcal{D}_b^{\nu} f(x) = {}_x\mathcal{D}_b^{\nu} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k \right] \quad (6)$$

definem as derivadas fracionárias de Caputo à esquerda e à direita, respectivamente.

Observamos inicialmente, que todas as definições acima se reduzem aos casos clássicos quando escolhemos um valor inteiro para a ordem  $\nu$ . Além disso, as definições que apresentamos foram elaboradas para um  $\nu \in \mathbb{R}$ , no entanto, elas são igualmente válidas se considerarmos  $\nu \in \mathbb{C}$ , com  $\text{Re}(\nu) \geq 0$ , [8, 18].

### 3 Equações Diferenciais Fracionárias

Nesta seção apresentamos as chamadas EDF e alguns resultados sobre a existência e unicidade das soluções, quando definidas, em intervalos finitos. Observamos que existem vários estudos com resultados eventualmente distintos para o problema de existência e unicidade de soluções destas, isto porque cada formulação depende das definições usadas para os operadores de diferenciação e integração [8, 10, 14, 18]. Os problemas mais estudados envolvem as soluções de EDFs segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo: o primeiro por ser a definição mais difundida e o segundo pela conhecida interpretação física das condições iniciais (ou de fronteira).

### 3.1 Formulação Segundo Riemann-Liouville

Uma equação diferencial (não linear) fracionária de ordem  $\nu > 0$ , definida num intervalo finito  $[a, b]$  é da forma

$$(\mathcal{D}_{a+}^\nu y)(x) = f(x, y(x)), \quad (7)$$

onde  $\mathcal{D}_{a+}^\nu$  é o operador de DFRL.

Se estabelecermos um conjunto de condições iniciais (ou de fronteira)

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\nu-k-1} y)(a^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} (\mathcal{D}_{a+}^{\nu-k-1} y)(x) \\ &= b_k, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $b_k \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{n} = [\nu] + 1$  se  $\nu \notin \mathbb{N}$  e  $\mathbf{n} = n$  se  $\nu \in \mathbb{N}$ , então analogamente ao caso de ordem inteira<sup>4</sup>, denotamos a Eq.(7) junto com as condições Eq.(8) de um problema de Cauchy (fracionário). Chamamos atenção para o caso em que  $k = \mathbf{n} - 1$  nas condições acima, pois devemos interpretar

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\nu-\mathbf{n}} y)(a^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} (\mathcal{D}_{a+}^{\nu-\mathbf{n}} y)(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} y)(x). \end{aligned}$$

Foge do escopo deste trabalho a discussão da existência e unicidade da solução do problema de Cauchy fracionário, entretanto, mencionamos que tais resultados já se encontram formulados na literatura e, podem ser encontrados em [8, 18, 22], por exemplo. Ressaltamos também que o problema de Cauchy (vide Eq.(7) e Eq.(8)) pode ser formulado, equivalentemente, em termos de uma equação integral de Volterra [8, 18, 22].

Para os propósitos deste trabalho, entretanto, a formulação do problema de Cauchy como explicitado acima é muito geral, assim nos restringimos a discutir exemplos para o caso em que as respectivas equações diferenciais ordinárias lineares fracionárias (EDOLF) são da forma

$$\mathcal{D}_{0+}^\nu y(t) - \lambda y(t) = f(t) \quad (9)$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$  e as condições iniciais

$$[\mathcal{D}_{0+}^{\nu-k-1} y(t)]_{t=0} = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1, \quad (10)$$

onde  $\mathbf{n} = [\nu] + 1$ . Observamos ainda que o limite inicial de integração foi escolhido como sendo o ponto  $t = 0$ , pois mesmo que tenhamos inicialmente um outro ponto  $t = a$ , sempre é possível por meio de uma mudança de variável fazer uma translação para a origem.

A solução deste problema que, em geral, é conduzido a uma integral de Volterra apresenta solução em termos de uma integral envolvendo uma função de Mittag-Leffler com dois parâmetros  $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$ , a qual explicitamos a seguir, para referência futura,

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} b_k t^{\nu-k-1} E_{\nu, \nu-k}(\lambda t^\nu) \\ &+ \int_0^t \frac{E_{\nu, \nu}(\lambda(t-\tau)^\nu) f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} \mathbf{d}\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

dando-nos uma solução explícita para a equação integral de Volterra associada ao problema de Cauchy composto pelas Eq.(9) e Eq.(10) [8, 20, 22].

---

<sup>4</sup>Obtido quando  $\nu \in \mathbb{N}$ .

### 3.2 Formulação Segundo Caputo

Analogamente à formulação segundo Riemann-Liouville, consideramos uma equação diferencial (não linear) fracionária de ordem  $\nu > 0$ , definida num intervalo finito  $[a, b]$  da forma

$$({}_a^C\mathcal{D}_x^\nu y)(x) = f(x, y(x)), \quad (12)$$

onde  ${}_a^C\mathcal{D}_x^\nu$  é o operador de DFC, sujeita às condições iniciais

$$({}_a^C\mathcal{D}_x^k y)(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1, \quad (13)$$

onde  $\mathbf{n} = [\nu] + 1$  se  $\nu \notin \mathbb{N}$  e  $\mathbf{n} = n$  se  $\nu \in \mathbb{N}$ . Observamos que na formulação do problema de Cauchy segundo Caputo, as derivadas

$${}_a^C\mathcal{D}_x^k = \frac{\mathbf{d}^k}{dx^k}$$

são as próprias derivadas usuais de ordem inteira, o que nos leva à tradicional interpretação física das condições iniciais, como no usual problema de Cauchy para ordens inteiras.

O teorema de existência para o problema de Cauchy pode ser encontrado em [22] e, equivalentemente à formulação de Riemann-Liouville, este problema pode ser conduzido a uma integral de Volterra (não-linear) [20, 22].

Nessa formulação, o teorema de existência para o problema de Cauchy supracitado fica então enunciado da seguinte forma [22].

Ressalta-se que os resultados entre as formulações de Riemann-Liouville e de Caputo, são tais que enquanto na primeira garante uma solução contínua somente em  $(0, h]$  na segunda a solução é garantida ser contínua em  $[0, h]$  [20, 22].

Novamente, para os propósitos deste trabalho as formulações acima são muito gerais, assim nos restringimos a discutir exemplos para o caso das EDOLF da forma

$${}_0^C\mathcal{D}_x^\nu y(t) - \lambda y(t) = f(t), \quad (14)$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , junto com as condições iniciais

$$[{}_0^C\mathcal{D}_x^k y(t)]_{t=0} = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1. \quad (15)$$

E, novamente, uma vez conduzida a sua forma integral, é possível obter uma solução explícita [8] para o problema de Cauchy composto pelas equações Eq.(14) e Eq.(15) em termos das funções de Mittag-Leffler como

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} b_k t^\nu E_{\nu, k+1}(\lambda t^\nu) + \\ & \int_0^t \frac{E_{\nu, \nu}(\lambda(t-\tau)^\nu) f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} \mathbf{d}\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

## 4 Transformada de Laplace dos Operadores Fracionários

Sabemos do cálculo de ordem inteira que o método da transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil na análise de equações diferenciais lineares, principalmente no caso em que a equação

possui coeficientes constantes. Neste caso, a transformada de Laplace reduz a EDO numa equação algébrica que é, em geral, muito mais simples de se solucionar, deixando a dificuldade de se obter a solução final da EDO de partida a um problema de inversão. Nesta seção, veremos que a mesma metodologia também pode ser usada para resolver problemas de valor inicial relacionado com as EDOLF (vide Eq.(9) e Eq.(14)).

Lembremos que uma função  $f(t)$  é dita de ordem exponencial  $\alpha$  se existir constantes positivas  $M$  e  $T$ , tais que

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M,$$

para todo  $t \geq T$ . Dessa forma, dada uma  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , de ordem exponencial  $\alpha$  a função  $F$  definida por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (17)$$

é chamada a transformada de Laplace da  $f$ , com a condição  $\text{Re}(s) > \alpha$  que garante a existência da integral acima. Da nomenclatura clássica é usual denotar a transformada de Laplace de  $f$  por  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  e iremos denotar por  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$  a transformada de Laplace inversa, que como sabemos é única pelo teorema de Lerch [25].

Dentre as diversas propriedades conhecidas da transformada de Laplace, listamos as seguintes:

- **Linearidade:**  $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
- **Convolução:**  $\mathcal{L}[f(t) \star g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s)$ , onde o produto  $\star$  é o de convolução;
- **Derivadas:**

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+);$$

- **Integral:**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

Assim, nosso intuito é calcular as transformadas de Laplace da IFRL, da DFRL e da DFC de uma dada função  $f(t)$  suficientemente bem comportada<sup>5</sup>.

Lembrando que a IFRL pode ser escrita como o produto de convolução [24]:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^\nu f)(t) &\equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau \\ &= f(t) \star \phi_\nu(t), \end{aligned}$$

então segue da transformada do produto de convolução listada acima, que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(\mathcal{I}_{0+}^\nu f)(t)] &= \mathcal{L}[f(t) \star \phi_\nu(t)] \\ &= F(s) \frac{1}{s^\nu}. \end{aligned} \quad (18)$$

---

<sup>5</sup>No sentido de satisfazer as condições de existência das IFRL/DFRL e das respectivas transformadas.

Agora da **Definição 2**, temos que  $(\mathcal{D}_{0+}^\nu f)(t) \equiv \mathcal{D}_{0+}^n g(t)$ , com  $\mathbf{n} = [\nu] + 1$  onde  $g(t) = (\mathcal{I}_{0+}^{n-\nu} f)(t)$ , assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(\mathcal{D}_{0+}^\nu f)(t)] &= \mathcal{L}[\mathcal{D}_{0+}^n g(t)] \\ &= s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} g^{(k)}(0^+).\end{aligned}\tag{19}$$

Mas, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}G(s) &= \mathcal{L}[(\mathcal{I}_{0+}^{n-\nu} f)(t)] \\ &= \frac{F(s)}{s^{n-\nu}},\end{aligned}\tag{20}$$

portanto, usando a Eq.(20) na Eq.(19), obtemos

$$\mathcal{L}[(\mathcal{D}_{0+}^\nu f)(t)] = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} g^{(k)}(0^+),\tag{21}$$

onde  $g^{(k)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{D}^k (\mathcal{I}_{0+}^{n-\nu} f)(t)$ .

Por outro lado, quando usamos a **Definição 3**, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[({}_0^C \mathcal{D}_x^\nu f)(t)] &= \mathcal{L}[\mathcal{I}_{0+}^{n-\nu} g(t)] \\ &= \frac{1}{s^{n-\nu}} G(s),\end{aligned}\tag{22}$$

onde

$$\begin{aligned}G(s) &= \mathcal{L}[(\mathcal{D}_{0+}^n f)(t)] \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+).\end{aligned}\tag{23}$$

Logo, os resultados das Eq.(22) e Eq.(23) nos levam à seguinte expressão

$$\mathcal{L}[({}_0^C \mathcal{D}_x^\nu f)(t)] = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} f^{(k)}(0^+).\tag{24}$$

Novamente fica evidente a diferença entre as definições dos operadores de DFRL e DFC, sendo que a segunda se mostra nitidamente mais oportuna de ser usada quando temos interpretações físicas claras das condições iniciais do problema de Cauchy, como nos mostram os resultados das transformadas de Laplace para a DFRL e DFC (vide Eq.(21) e Eq.(24)).

Antes de apresentarmos alguns exemplos, listamos, por conveniência, as transformadas de Laplace das funções de Mittag-Leffler<sup>6</sup>, que nos serão úteis na hora de resolvemos o problema de

<sup>6</sup>Estas transformadas podem ser facilmente calculadas, usando a representação em série das funções de Mittag-Leffler e calculando as transformadas termo a termo, o que é possível visto que estas funções são inteiras no plano  $\mathbb{C}$ .

inversão  $\mathcal{L}^{-1} : F(s) \mapsto f(t)$ . Assim, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \\ &= \frac{s^{-1}}{1 + \lambda s^{-\alpha}}\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)] &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda} \\ &= \frac{s^{-\beta}}{1 + \lambda s^{-\alpha}}\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(-\lambda t^\alpha)] &= \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha + \lambda)^\gamma} \\ &= \frac{s^{-\beta}}{(1 + \lambda s^{-\alpha})^\gamma}\end{aligned}\tag{27}$$

Antes de passarmos a discutir modelos via CF, apresentamos dois problemas de valor inicial envolvendo a formulação de Riemann-Liouville (um problema homogêneo e o outro não homogêneo) enquanto a formulação de Caputo será apresentado na próxima seção.

**Example 4** Determine  $y(t)$  no problema

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} y(t) - \lambda y(t) = 0, \\ \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-1} y(0^+) = \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} y(0^+) = b_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} y(t) - \lambda y(t)] &= 0 \\ s^{\frac{1}{2}} Y(s) - b_0 - \lambda Y(s) &= 0 \\ (s^{\frac{1}{2}} - \lambda) Y(s) &= b_0,\end{aligned}$$

o que implica que em

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^{\frac{1}{2}} - \lambda},$$

onde podemos verificar, usando a Eq.(26), que

$$y(t) = b_0 t^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}}),$$

onde  $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$  é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros [17]. A solução coincide com a solução do problema de Cauchy conforme a Eq.(11).

Vejamos ainda um segundo exemplo, agora não-homogêneo.

**Example 5** Resolva o problema composto pela EDF e as condições a seguir:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{4}{3}} y(t) - \lambda y(t) &= t^2, \\ \mathcal{D}_{0+}^{\frac{4}{3}-1} y(0^+) &= \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{3}} y(0^+) = b_0 \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{D}_{0+}^{\frac{4}{3}-2} y(0^+) &= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{2}{3}} y(0^+) = b_1 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação, obtemos

$$\mathcal{L} \left[ \mathcal{D}_{0+}^{\frac{4}{3}} y(t) - \lambda y(t) \right] = \frac{\Gamma(3)}{s^3},$$

ou ainda

$$\left( s^{\frac{4}{3}} - \lambda \right) Y(s) = \frac{\Gamma(3)}{s^3} + sb_1 + b_0,$$

o que implica em

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^{\frac{4}{3}} - \lambda} + \frac{sb_1}{s^{\frac{4}{3}} - \lambda} + \frac{\Gamma(3)}{s^3} \frac{1}{s^{\frac{4}{3}} - \lambda},$$

onde podemos verificar, usando a Eq.(26) e a propriedade da transformada do produto de convolução, que

$$\begin{aligned} y(t) &= b_0 t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}} \left( \lambda t^{\frac{4}{3}} \right) + b_1 t^{-\frac{2}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{1}{3}} \left( \lambda t^{\frac{4}{3}} \right) \\ &\quad + \left[ t^2 \star \left( t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}} \left( \lambda t^{\frac{4}{3}} \right) \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^1 b_k t^{\frac{4}{3}-k-1} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}-k} \left( \lambda t^{\frac{4}{3}} \right) + \\ &\quad \int_0^t \left[ (t-\tau)^{\frac{1}{3}} E_{\frac{4}{3}, \frac{4}{3}} \left( \lambda (t-\tau)^{\frac{4}{3}} \right) \right] \tau^2 d\tau \end{aligned}$$

e, novamente, o resultado coincide com a fórmula para a solução do problema de Cauchy conforme a Eq.(11).

Estes exemplos apesar de simples, ilustram que a metodologia da transformada de Laplace continua tendo a mesma eficácia para a resolução de EDOLFs (com coeficientes constantes) para a formulação de Riemann-Liouville, assim como nos casos de ordens inteiras. Conforme mencionamos, uma aplicação usando a formulação segundo Caputo, será discutida quando apresentarmos uma possível generalização para o problema de Cauchy associado aos osciladores harmônicos na **Seção 5.2**.

## 5 Modelos via Cálculo Fracionário

Vejamos agora como os conceitos apresentados do cálculo fracionário podem ajudar a descrever de forma mais apropriada certos fenômenos físicos, quando comparados com a abordagem clássica. Ilustraremos a afirmação acima investigando um problema particular no campo da viscoelasticidade linear e numa possível generalização do problema associado ao oscilador harmônico.

### 5.1 Viscoelasticidade Linear

A viscoelasticidade é uma área que investiga o comportamento de materiais que admitem características elástica e de viscosidade quando submetidos à forças de deformação. No estudo destas características, dois conceitos são importantes: a tensão (*stress*)  $\sigma(t)$  e a deformação (*strain*)  $\epsilon(t)$ ,

ambas descritas como uma função do tempo  $t$  e os modelos matemáticos aplicados procuram, justamente, descrever a relação entre estas quantidades.<sup>7</sup>

Classicamente, as leis da mecânica que são usadas para descrever as relações supracitadas são as de Newton e de Hooke, sendo a primeira para o comportamento de líquidos ideais (ou líquidos Newtonianos) modelado pela equação

$$\sigma(t) = \eta \frac{d}{dt} \epsilon(t), \quad (28)$$

onde  $\eta$  é a chamada constante de viscosidade do material. Já a segunda lei (Hooke) modelada pela equação

$$\sigma(t) = E \epsilon(t), \quad (29)$$

descreve o comportamento de materiais elásticos (ideais), sendo  $E$  a chamada constante elástica (ou módulo de elasticidade) do material.

No estudo de sistemas modelados pelas equações Eq.(28) ou Eq.(29), o interesse é obter descrições sobre as respostas da tensão com respeito à deformação ou viceversa, sendo que os ensaios experimentais usualmente feitos são os de [9]:

- **Relaxação de tensão via deformação controlada:** onde se mede o estado de tensão causado no material de teste pela aplicação de uma deformação previamente definida. Neste caso, a resposta da tensão à aplicação da deformação é chamada *módulo de relaxação*  $\mathbf{G}(t)$ .
- **Teste de fluência via tensão controlada:** onde se aplicam ao material teste uma tensão previamente definida e medem-se as deformações causadas por essa tensão aplicada. Neste caso, a resposta da deformação à aplicação de uma tensão é chamada de *fluência*  $\mathbf{J}(t)$ .

No estudo destes experimentos, as excitações impostas ao sistema (ou material teste) são usualmente modeladas pelo impulso (função generalizada)  $\delta$ -Dirac ou a função degrau (ou de Heaviside)  $H(t)$  definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \quad (30)$$

sendo que esta última é fisicamente mais realista que a primeira. Logo, neste trabalho, consideraremos as respostas  $\mathbf{G}(t)$  e  $\mathbf{J}(t)$  quando submetidas a uma excitação do tipo função degrau  $H(t)$  (Ver Figura 1 e Figura 2).

Na natureza, entretanto, não existem sólidos ou fluidos ideais de modo que na prática os materiais reais possuem propriedades situadas entre estes dois casos limites. Esquematicamente, o comportamento elástico (ideal) é descrito por uma mola, enquanto o comportamento viscoso (ideal) é descrito como um amortecedor (Figura 3) e os modelos aplicados na prática são uma combinação destes dois elementos ideais.

Entre os modelos mais simples, estão os de Maxwell e de Voigt, como descritos pela Figura 4:

No modelo de Maxwell, a equação que descreve esta configuração é dada por

$$\frac{1}{\eta} \sigma(t) + \frac{1}{E} \frac{d}{dt} \sigma(t) = \frac{d}{dt} \epsilon(t) \quad (31)$$

---

<sup>7</sup>Em geral, a tensão e a deformação são campos tensoriais, assim para esta apresentação pressupomos que os materiais são isotropicamente uniformes.

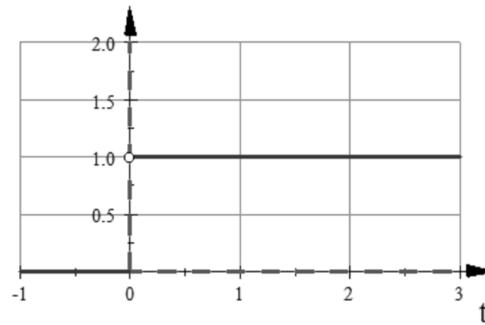


Figura 1: O Módulo de relaxação para um sólido ideal ( $E = 1$ ; traço contínuo) e um fluido ideal ( $\eta = 1$ ; traço pontilhado) gerados a partir de uma excitação com a função de Heaviside.

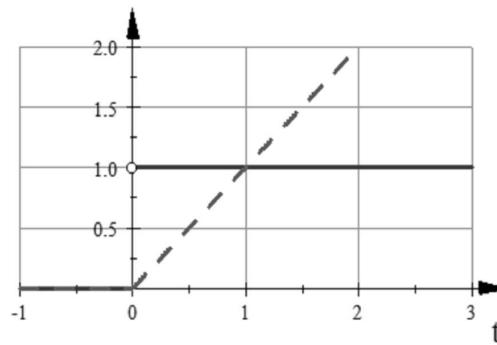


Figura 2: O Módulo de fluência para um sólido ideal ( $E = 1$ ; traço contínuo) e um fluido ideal ( $\eta = 1$ ; traço pontilhado) gerados a partir de uma excitação com a função de Heaviside.



Figura 3: (a) Elemento elástico (ideal) é descrito por uma mola; (b) enquanto o elemento viscoso (ideal) é apresentado como um amortecedor.

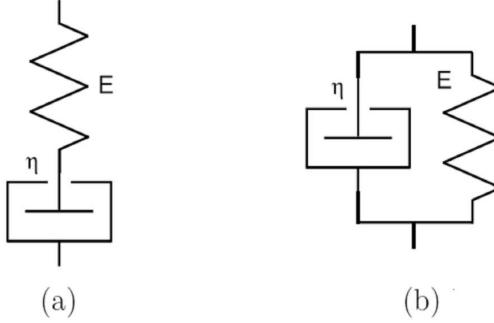


Figura 4: (a) Esquematização em série (Maxwell); (b) Esquematização em paralelo (Voigt).

e as funções de resposta (módulo de relaxação  $\mathbf{G}_M(t)$  e fluênciia  $\mathbf{J}_M(t)$ ) são descritas como

$$\mathbf{G}_M(t) = Ee^{-\frac{E}{\eta}t}, \quad (32)$$

$$\mathbf{J}_M(t) = \frac{1}{E}H(t) + \frac{1}{\eta}t. \quad (33)$$

Já no modelo de Voigt, a equação que descreve esta configuração é dada por

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) + \eta \frac{d}{dt}\epsilon(t) \quad (34)$$

e as funções de resposta (módulo de relaxação  $\mathbf{G}_V(t)$  e fluênciia  $\mathbf{J}_V(t)$ ) são descritas como

$$\mathbf{G}_V(t) = EH(t) + \eta\delta(t), \quad (35)$$

$$\mathbf{J}_V(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right). \quad (36)$$

Estes dois modelos também diferem das observações experimentais em alguns pontos de modo que estudiosos da área elaboraram os mais diversos modelos (e.g., Zener, Kelvin, Burger, etc...) para tentar chegar a uma descrição com maior sintonia com os experimentos [9]. Por exemplo, continuando com a tentativa de generalização dos modelos de Maxwell e Voigt, os modelos de Zener<sup>8</sup> combinam os dois anteriores dos seguintes modos (Figura 5): (a) o modelo de Maxwell modificado combina um elemento de mola com o elemento de Maxwell em paralelo (b) e o modelo de Voigt modificado combina um elemento de mola em série com o elemento de Voigt.

O modelo de Maxwell modificado é descrito pela equação

$$\frac{E_2}{\eta}\sigma(t) + \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{E_1 E_2}{\eta}\epsilon(t) + (E_1 + E_2) \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (37)$$

<sup>8</sup>Seguindo a sugestão de nomenclatura como proposto em [9], estes modelos foram estudados por Clarence Melvin Zener (1905-1993) e os resultados publicados no seu livro de 1948, *Elasticity and Anelasticity of Metals*, Univ. of Chicago Press; e também são conhecidos como modelos de sólidos lineares padrão.

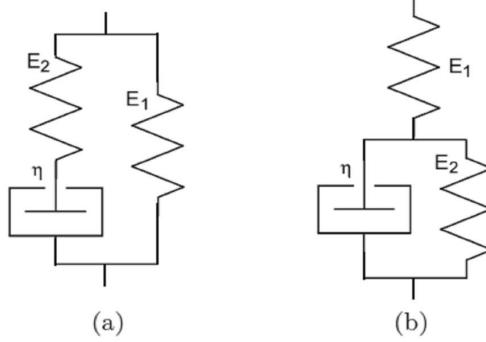


Figura 5: Os dois tipos de modelos estudados por Zener: (a) Maxwell modificado; (b) Voigt modificado.

com respostas (módulo de relaxação  $\mathbf{G}_{ZM}(t)$  e fluênci  $\mathbf{J}_{ZM}(t)$ ) dadas por, respectivamente

$$\mathbf{G}_{ZM}(t) = E_1 + E_2 e^{-\frac{E_2}{\eta}t}, \quad (38)$$

$$\mathbf{J}_{ZM}(t) = \frac{1}{E_1} - \frac{E_2 e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}t}}{E_1 (E_1 + E_2)}. \quad (39)$$

Já o modelo de Voigt modificado é descrito pela equação

$$\frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma(t) + \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{E_1 E_2}{\eta} \epsilon(t) + E_1 \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (40)$$

com respostas (módulo de relaxação  $\mathbf{G}_{ZV}(t)$  e fluênci  $\mathbf{J}_{ZV}(t)$ ) dadas por, respectivamente

$$\mathbf{G}_{ZV}(t) = \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta}t} + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad (41)$$

$$\mathbf{J}_{ZV}(t) = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} - \frac{1}{E_2} e^{-\frac{E_2}{\eta}t}. \quad (42)$$

A Figura 6, mostra as respostas dos quatro casos mencionados: Maxwell, Voigt, Maxwell modificado e Voigt Modificado. Observamos que no modelo de Maxwell, o processo de relaxação da tensão parece razoavelmente realista, no entanto, a resposta de fluênci mostra uma deformação crescendo indefinidamente. No mo-deloo de Voigt, o contrário acontece, a resposta de fluênci parece razoavelmente realista, mas o processo de relaxação é inexistente (permanece constante). Por outro lado, nos dois modelos modificados as respostas são, até certa forma, semelhantes, sendo que ambos qualitativamente ficam de acordo com alguns resultados experimentais, mas ambos possuem problemas na des-crição quantitativa, visto que predizem um valor finito para a tensão no tempo inicial  $t = 0$  mesmo diante do salto (descontínuo) de mudança de deformação causada por uma excitação do tipo Heaviside  $H(t)$  e nenhum dos dois atinge uma relaxação de tensão completa. Além disso, ambos modelos modificados predizem uma descontinuidade da resposta de fluênci imediatamente após a aplicação de uma excitação de tensão do tipo Heaviside  $H(t)$ . Estudos indicam que os modelos podem ser aperfeiçoados se forem incluídos mais elementos (de Newton, de Hooke, de Maxwell, de Voigt, etc) em série ou paralelo, mas isto implicaria em equações cada vez mais complicadas

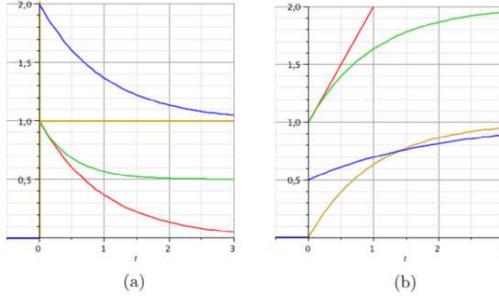


Figura 6: (a) Respostas do módulo de relaxação da tensão para os modelos de Maxwell, Voigt, Maxwell modificado e Voigt modificado. (b) Resposta da fluência da deformação para os respectivos modelos.

e de ordens superiores. Uma alternativa para encontrarmos uma solução mais satisfatória a este problema, faz uso do cálculo fracionário no equacionamento do problema como veremos a seguir.

O leitor pode não ter percebido, mas observamos um aspecto interessante a respeito dos dois casos ideais limites: a lei de Hooke idealizada pela Eq.(29) nos diz que a tensão  $\sigma(t)$  é diretamente proporcional à *derivada de ordem zero* da deformação  $\epsilon(t)$ ; enquanto a lei de Newton idealizada pela Eq.(28) nos diz que a tensão  $\sigma(t)$  é diretamente proporcional à *derivada de ordem um* da deformação  $\epsilon(t)$ . Então uma generalização para o comportamento viscoelástico dos materiais, segundo a ideia de derivadas de ordem fracionária, seria conjecturar que a tensão  $\sigma(t)$  é diretamente proporcional a *derivada fracionária de ordem  $\alpha$* , sendo  $0 < \alpha < 1$ , segundo a equação do tipo<sup>9</sup>

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha \mathbf{D}^\alpha \epsilon(t), \quad \tau = \frac{\eta}{E}, \quad (43)$$

sendo  $\eta$  e  $E$  os coeficientes de viscosidade e elástico do material, respectivamente. Claramente os casos ideais limites são recuperados quando tomamos  $\alpha = 0$  (Hooke) ou  $\alpha = 1$  (Newton). O operador  $\mathbf{D}^\nu$  seria qualquer operador de diferenciação fracionária escolhido para ser usado (e.g., Riemann-Liouville, Caputo, etc...). Em particular, se quisermos um modelo que inclua todo o histórico do material (em função do tempo), podemos estabelecer que o limite inferior seja  $t = -\infty$  e ainda, exigindo a causalidade do sistema (i.e., que as funções sejam identicamente nulas para  $t \leq 0$ ), então as definições segundo Riemann-Liouville e Caputo coincidiriam.

As funções de respostas (módulo de relaxação  $\mathbf{G}_{SB}(t)$  e fluência  $\mathbf{J}_{SB}(t)$ ) relacionadas ao modelo da Eq.(43) podem ser obtidas, por exemplo, via a metodologia da transformada de Laplace como discutido na seção anterior e resultam em

$$\mathbf{G}_{SB}(t) = \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\nu)} t^{-\alpha}, \quad (44)$$

$$\mathbf{J}_{SB}(t) = \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(1+\nu)}. \quad (45)$$

Estudos comprovam que mesmo este modelo simplista, resulta em descrições qualitativas mais precisas do comportamento de materiais reais quando submetidos aos mesmos testes descritos na seção anterior e mesmo as descrições quantitativas parecem mais promissoras. De fato, podemos

<sup>9</sup>Este modelo é conhecido como modelo de Scott-Blair [9].

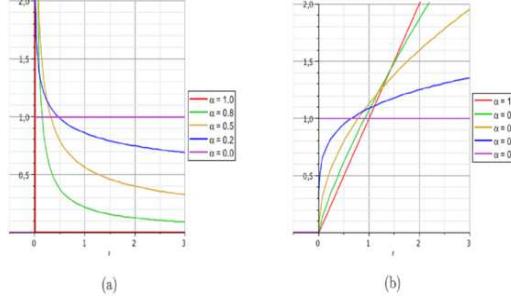


Figura 7: Respostas de módulo de relaxação para o modelo fracionário de Scott-Blair para diferentes parâmetros  $\alpha$ , ( $E = 1$ ,  $\eta = 1$ ); (b) Respostas da fluência da deformação para o modelo fracionário de Scott-Blair para diferentes parâmetros  $\alpha$  ( $E = 1$ ,  $\eta = 1$ ).

observar pela Figura 7, que todas as respostas (módulo de relaxação  $\mathbf{G}_{SB}(t)$  e fluência  $\mathbf{J}_{SB}(t)$ ) para diversas ordens  $\alpha$  se comportam quantitativamente como o esperado, i.e., o módulo de relaxação possui um valor infinitamente grande para  $t = 0$  e decaindo para relaxamento total quando  $t \rightarrow \infty$ , já a fluência mostra o crescimento da deformação de forma mais apropriada com os experimentos mantendo a continuidade em  $t = 0$ , lembrando que os gráficos dados na Figura 7 foram feitos a partir de excitações modeladas pela função degrau  $H(t)$ .

Este exemplo, mesmo que simples, mostra o potencial do uso do cálculo fracionário para abordarmos o problema de viscoelasticidade linear e de fato, este ramo tem se mostrado um terreno fértil para estudiosos da área com diversos livros [7, 9, 14] mostrando detalhamento dos modelos e resultados experimentais.

Mencionamos também outras áreas em que o cálculo fracionário tem se mostrado uma ferramenta poderosa, a saber, na descrição de osciladores harmônicos fracionários, forças de fricção fracionárias, controladores fracionários, equações de ondas fracionárias, etc... [6, 9, 14, 26, 27].

## 5.2 Osciladores Harmônicos

Nesta seção discutimos uma possível generalização do problema associado ao oscilador harmônico. Recuperamos o caso inteiro e a esse propomos uma generalização no sentido fracionário, isto é, introduzimos dois parâmetros associados à ordem da equação fracionária. A fim de obtermos uma solução dessa equação, utilizamos a metodologia da transformada de Laplace e fornecemos essa solução explícita para o caso em que não temos o termo associado com o atrito, ou seja, consideramos o oscilador sem amortecimento e apresentamos essa solução em termos das funções de Mittag-Leffler.

Vamos considerar apenas o caso em que a derivada é tomada no sentido de Caputo (**Definição 3**) enquanto as condições iniciais admitem a clássica interpretação. Para discutirmos tal problema inicia-se por obter uma equação integral correspondente à equação diferencial associada ao oscilador harmônico

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \mu \frac{d}{dt}x(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

com  $\mu \geq 0$ , representando o termo associado ao atrito e  $\omega > 0$  é a frequência do oscilador, sendo as condições iniciais  $x(0)$  e  $x'(0)$  dadas.

Integrando essa equação diferencial duas vezes podemos escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \mu t x(0) + t x'(0) - \\ &\quad \mu \int_0^t x(v) \mathbf{d}v - \omega^2 \int_0^t \int_0^v x(u) \mathbf{d}u \mathbf{d}v \end{aligned}$$

que, após a utilização do teorema de Goursat [8, 10] permite escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \mu t x(0) + t x'(0) - \\ &\quad \mu \int_0^t x(v) \mathbf{d}v - \omega^2 \int_0^t (t-u) x(u) \mathbf{d}u. \end{aligned}$$

Então, dados  $x(0)$  e  $x'(0)$  obtemos uma equação integral associada ao problema do oscilador harmônico equivalente ao problema composto pela equação diferencial e as condições iniciais.

A fim de explicitar os cálculos, consideremos o oscilador harmônico livre, isto é, sem atrito com a equação integral já na forma fracionária

$$x(t) = x(0) + t x'(0) - \frac{\omega^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} x(u) \mathbf{d}u \quad (46)$$

com  $1 < \alpha \leq 2$ . Escolhemos esse intervalo a fim de recuperar o resultado do oscilador harmônico clássico, no caso em que  $\alpha = 2$ .

Note que essa equação integral fracionária corresponde à equação diferencial fracionária

$${}_0^C \mathcal{D}_x^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = 0$$

e as condições iniciais  $x(0)$  e  $x'(0)$  sendo  $1 < \alpha \leq 2$  e a derivada considerada no sentido de Caputo. **(Definição 3).**

Vamos procurar uma solução da equação integral através da metodologia da transformada de Laplace que após aplicada na Eq.(46) e utilizando a definição do produto de convolução permite escrever

$$F(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{x'(0)}{s^2} - \omega^\alpha \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \star x(t) e^{-st} \mathbf{d}t$$

onde o símbolo  $\star$  denota o produto de convolução. Logo, obtemos

$$F(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{x'(0)}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^\alpha} F(s)$$

sendo

$$F(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} \mathbf{d}t$$

a transformada de Laplace de  $x(t)$  de parâmetro  $s$  com  $\text{Re}(s) > 0$ . Isolando  $F(s)$  podemos escrever, já rearranjando,

$$F(s) = x(0) \frac{s^{-1}}{1 + \omega^\alpha s^{-\alpha}} + x'(0) \frac{s^{-2}}{1 + \omega^\alpha s^{-\alpha}}.$$

Para recuperar a solução  $x(t)$  tomamos a transformada de Laplace inversa. Logo para

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) \mathbf{d}s \equiv \mathcal{L}^{-1}[F(s)],$$

obtemos a solução na forma

$$x(t) = x(0) E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) + x'(0) E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)$$

onde  $E_\alpha(\cdot)$  e  $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$  são as funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros, respectivamente [8, 9, 17]. Admita, enfim, que  $x(0) = 1$  e  $x'(0) = 0$  logo a solução neste caso é

$$x(t) = E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)$$

que, no caso extremo  $\alpha = 2$  fornece  $x(t) = \cos \omega t$  que é a solução do problema associado ao oscilador harmônico de ordem inteira.

## 6 Conclusão

Neste trabalho foram introduzidas as chamadas equações diferenciais fracionárias e constatado que a metodologia da transformada de Laplace mostra-se, assim como no caso das EDOs de ordem inteiras com coeficientes constantes, uma ótima ferramenta a ser usada em vista dos benefícios da sua simplicidade. Em particular, verificou-se de forma indireta que da mesma forma que a função exponencial  $e^x$  desempenha um papel de destaque no cálculo clássico de ordem inteira, as funções de Mittag-Leffler desempenham um papel destacado análogo no cálculo de ordem arbitrária. O que queremos denotar por esta afirmação é que assim como se faz necessário um bom entendimento da função exponencial para o estudo e aplicações do cálculo diferencial e integral clássicos o mesmo pode ser dito à respeito das funções de Mittag-Leffler para aqueles que desejam se aventurar pelo cálculo fracionário. De fato, não é incomum ao resolvemos equações diferenciais (ordinárias) de ordem fracionária, obtermos soluções que, se não diretamente expressas em termos de uma função de Mittag-Leffler, então ao menos se relacionam com ela através de alguma identidade.

Por fim, observamos que, de modo relativamente simples, problemas clássicos da Física-Matemática ficam bem modelados sob a óptica do cálculo fracionário e dão resultados promissores (inclusive coincidindo com os resultados de ordem inteira já firmados) mesmo quando são elaborados de forma simples, como verificados nos exemplos de viscoelasticidade linear e osciladores harmônicos.

O leitor interessado em conhecer mais modelagens usando o cálculo fracionário, pode recorrer as fontes [12, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

### AGRADECIMENTOS

FGR agradece a CAPES pela bolsa disponível durante o programa de doutorado.

Os autores também são gratos ao árbitro pelos pareceres e sugestões dadas para tornar este trabalho melhor enquadrado ao público alvo.

## Referências

- [1] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, A poster about the recent history of fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **13**, 329-334, (2010).
- [2] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, A poster about the old history of fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **13**, 447-454, (2010).

- [3] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, Recent history of fractional calculus, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.*, **16**, 1140-1153, (2011).
- [4] H. Silva Oliveira, *Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária*, Dissertação de Mestrado, Imecc- Unicamp, Campinas, (2010).
- [5] R. Figueiredo Camargo e E. Capelas de Oliveira, *Cálculo Fracionário*, Livraria Editora da Física, São Paulo, (em fase de impressão), (2015).
- [6] Herrmann, R., *Fractional Calculus, An Introduction for Physicists*, Word Scientific Publishing Co., Singapore, 2011.
- [7] Hilfer, R., *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Word Scientific Publishing Co., Singapore, 2000.
- [8] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.
- [9] Mainardi, F., *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, London, 2010.
- [10] Miller, K. S. and Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [11] Moshrefi-Tobarti, M. and Hammond, J. K., Physical and geometrical interpretation of fractional operators, *J. of the Franklin Inst.*, **335** (6), 1077-1086 (1998). DOI: 10.1016/S0016-0032(97)00048-3.
- [12] Oldham, K. B. and Spanier, J., *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Publications, Inc., New York, 2002.
- [13] Ortigueira, M. D. and Tenreiro Machado, J. A., What is a fractional derivative?, *J. Comput. Phys.* (2014). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019>.
- [14] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [15] Podlubny, I., Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fract. Cal. Appl. Anal.*, **5**(4), 367- 386 (2002).
- [16] Podlubny, I. and Heymans, N., Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, *Rheol. Acta.*, (45), 765-771 (2006). DOI 10.1007/s00397-005-0043-5.
- [17] R. Gorenflo, et al., *Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications. Theory And Applications*, Springer Monography in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2014).
- [18] Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [19] E. Conthartezze Grigoletto, *Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, (2014).

- [20] Rodrigues, F. G., *Sobre Cálculo Fracionário e Soluções da Equação de Bessel*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, (2015).
- [21] Capelas de Oliveira, E. and Tenreiro Machado, J. A., A review of definitions for fractional derivatives and integrals, *Math. Prob. Eng.*, ID 238459 (2014).
- [22] Diethelm, K., *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [23] R. Khalil, M. al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, **264**, 65-70, (2014).
- [24] Rodrigues, F., G. e Capelas de Oliveira, E., Introdução às derivadas fracionárias, (submetido à publicação), (2015).
- [25] Capelas de Oliveira, e Tygel, M., *Métodos Matemáticos para a Engenharia, Volume 1*, SBMAC, São Carlos, 2001.
- [26] Das. S., *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [27] Tarasov, V. E., *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [28] Abbas, S., Benchora, M. and N'Guérékata, G. M., *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin - Heidleberg, 2014.
- [29] Capelas de Oliveira, E., Mainardi, F and Vaz, J. Jr., Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics., *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **193**, 161-171 (2011).
- [30] Capelas de Oliveira, E., Mainardi, F., Vaz, J. Jr., Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function, *Meccanica*, **49**, 2049-2060 (2014). DOI 10.1007/s11012-014-9930-0.
- [31] Cresson, J., *Fractional Calculus in Analysis, Dynamics and Optimal Control*, Nova Science Publishers Inc., Hauppauge NY, 2014.
- [32] Garra, R. et al., Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications, *Appl. Math. Comput.*, **242**, 576-589 (2014).
- [33] Silva Costa, F., et al., Slowing-down of neutrons: A fractional model, *Comm. Appl. Ind. Math.*, (2015).
- [34] Solteiro Pires, E. J., Tenreiro Machado, J. A. and de Moura Oliveira, P. B., Fractional order dynamics in a GA planner, *Signal Process.* **83**, 2377-2386 (2003).
- [35] West, B. J., Colloquium: Fractional calculus view of complexity: A tutorial, *Rev. Mod Phys.*, **8**, 1169-1182 (2014).